

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

Γ΄ ΤΑΞΗΣ 1ου ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΟΜΟΤΗΝΗΣ

ΣΑΒΒΑΤΟ 7 ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2015

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

A1. Αν $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, να αποδείξετε ότι $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$.

Μονάδες 7

A2. Πότε μια συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται 1-1;

Μονάδες 4

A3. Να διατυπώσετε το θεώρημα ενδιαμέσων τιμών.

Μονάδες 4

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Για κάθε μιγαδικό αριθμό $z \neq 0$ ορίζουμε $z^0 = 1$.

β) Στο μιγαδικό επίπεδο οι εικόνες δύο συζυγών μιγαδικών είναι σημεία συμμετρικά ως προς τον άξονα των φανταστικών αριθμών.

γ) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ ή $-\infty$ τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$.

δ) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα σε ένα ανοιχτό διάστημα (α, β) , τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα (A, B) , όπου $A = \lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x)$ και $B = \lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x)$.

ε) Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς συνάρτησης f είναι διάστημα.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z, w για τους οποίους ισχύει $z + |z + i| = 2 + i$ και $|w - 3i| + |\bar{w}z + 3iz| = 2\sqrt{5}$.

B1. Να αποδείξετε ότι $z = i$.

Μονάδες 6

B2. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του w στο μιγαδικό επίπεδο είναι κύκλος με κέντρο το σημείο $K(0,3)$ και ακτίνα $\sqrt{5}$.

Μονάδες 6

B3. Έστω w_1, w_2 δύο μιγαδικοί που ανήκουν στον γεωμετρικό τόπο του ερωτήματος B2. Αν $\operatorname{Re}(w_1) = \operatorname{Re}(w_2) > 0$ και $\operatorname{Im}(w_1) - \operatorname{Im}(w_2) = 4$ να βρείτε τους αριθμούς w_1, w_2 .

Μονάδες 8

B4. Αν $w_1 = 1 + 5i$ και $w_2 = 1 + i$ να βρείτε την τιμή της παράστασης $(w_1 - 4i)^{12} + (w_2 - 2i)^{12}$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x + \eta\mu x$ για κάθε $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και ότι $f^{-1}(0) = 0$.

Μονάδες 5

Γ2. Να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(x+1) = x$.

Μονάδες 5

Γ3. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^{-1}(x) + \eta\mu[f^{-1}(x)]}{x - f(x)}$.

Μονάδες 5

Γ4. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(\sqrt{x^2 + 1} + x \right) f \left(\frac{1}{x} \right) \right]$.

Μονάδες 5

Γ5. Να λύσετε την ανίσωση $f \left(\frac{x}{2} \right) - \frac{x}{3} < \frac{\pi}{6} + \eta\mu \left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{6} \right)$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z, w με $|z + i\sqrt{2}| = |z\sqrt{2} + i|$ και

$w(2 - i) + 3i\bar{w} = -2$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|z+w|\eta\mu x + |z-w|\eta\mu^2 x}{x}, & \text{αν } x \neq 0 \\ |z+w|, & \text{αν } x = 0 \end{cases}.$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι $|z| = 1$ και $w = 1 - i$.

Μονάδες 6

Δ2. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής.

Μονάδες 4

Δ3. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας τουλάχιστον $x_0 \in (0, \sqrt{2})$ τέτοιος ώστε $(2 - x_0^2)f(x_0) = 6 - 2x_0^4$.

Μονάδες 5

Δ4. α) Αν ο μιγαδικός αριθμός z είναι ρίζα της εξίσωσης $z^2 + z + 1 = 0$ να αποδείξετε ότι $z^3 = 1$ και να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $(z+1)^4 + z$.

Μονάδες 5

β) Αν ο μιγαδικός αριθμός z δεν είναι ρίζα της εξίσωσης $z^2 + z + 1 = 0$ να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$\left\| \frac{4}{3} - \frac{1}{1+z+z^2} \right\| - \left\| \frac{1}{1+z+z^2} \right\|.$$

Μονάδες 5

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. Στο εξώφυλλο του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή. Στην αρχή των απαντήσεών σας να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο και **να μην γράψετε** πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, και μόνο για πίνακες, διαγράμματα κλπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 11.00.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ