

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

Γ΄ ΤΑΞΗΣ 1ου ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΟΜΟΤΗΝΗΣ

ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 2 ΜΑΙΟΥ 2014

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΠΕΝΤΕ (5)

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν

- η f είναι συνεχής στο Δ και
- $f'(x) = 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ ,

να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ .

Μονάδες 7

A2. Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ . Πότε λέμε ότι η f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω ή είναι κυρτή στο Δ ;

Μονάδες 4

A3. Να διατυπώσετε το θεμελιώδες θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού.

Μονάδες 4

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \geq 0$, τότε κατ' ανάγκη θα είναι $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.

β) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και $\alpha, \beta, \gamma \in \Delta$ τότε ισχύει

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x)dx + \int_{\beta}^{\gamma} f(x)dx.$$

γ) Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0 .

- δ) Οι ρητές συναρτήσεις $\frac{P(x)}{Q(x)}$, με βαθμό του αριθμητή $P(x)$ μεγαλύτερο τουλάχιστον κατά δύο του βαθμού του παρονομαστή, δεν έχουν πλάγιες ασύμπτωτες.
- ε) Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ . Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και $f'(x_0) = 0$ τότε η f παρουσιάζει υποχρεωτικά τοπικό ακρότατο στο x_0 .

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = 2\ln x - \ln(x^2 + 1)$ για κάθε $x > 0$. Δίνεται ακόμη η συνάρτηση $g : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$g(x) = \begin{cases} xf(x), & \text{αν } x > 0 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$$

B1. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f .

Μονάδες 6

B2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα.

Μονάδες 5

B3. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι συνεχής.

Μονάδες 4

B4. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας τουλάχιστον $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιος ώστε

$$f'(x_0) + \frac{\ln 2}{x_0} = -\frac{f(x_0)}{x_0}.$$

Μονάδες 5

B5. Να αποδείξετε ότι $\frac{f(x) + \ln 2}{x - 1} < 1$ για κάθε $x > 1$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση με συνεχή παράγωγο για την οποία ισχύει $f^2(x)f'(x) > \frac{1}{3}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = 1$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} .

Μονάδες 4

Γ2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = f^3(x) - x$ είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} .

Μονάδες 2

Γ3. Να αποδείξετε ότι $f(x) > \sqrt[3]{x+1}$ για κάθε $x > 0$.

Μονάδες 3

Γ4. Να λύσετε την ανίσωση $f^3(x^2 + 2x) - x^2 < f^3(2x + 1) - 1$.

Μονάδες 5

Γ5. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 2014$ έχει μοναδική θετική ρίζα.

Μονάδες 5

Γ6. Αν $f(1) = \frac{4}{3}$ και E είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $h(x) = \frac{1}{f^2(x)}$, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 0$ και $x = 1$ να αποδείξετε ότι $E < 1$.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση για την οποία ισχύει $f(x) > 0$ και $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Έστω ακόμη η συνάρτηση

$$g(x) = \int_0^x \frac{f(t)}{e^x} dt, \text{ με } x \in \mathbb{R}.$$

Δ1. Να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημο της συνάρτησης g .

Μονάδες 5

Δ2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 0]$.

Μονάδες 5

Δ3. Να αποδείξετε ότι $\int_0^x f(t) dt \geq xf(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 5

Δ4. Να αποδείξετε ότι $2 \int_0^1 xf(x) dx < \int_0^1 f(x) dx$.

Μονάδες 5

Δ5. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\frac{f(0) - 2 \int_0^1 tf(t) dt}{f(x)} = \frac{2-x}{x}$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο διάστημα $(0, 2)$.

Μονάδες 5

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. Στο εξώφυλλο του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή. Στην αρχή των απαντήσεών σας να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο και **να μην γράψετε** πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, και μόνο για πίνακες, διαγράμματα κλπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 13.00.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ